Valik harjutusülesandeid

1. 52-lehelisest kaardipakist tõmmatakse juhuslikult üks kaart.
Sündmused on defineeritud järgmiselt:
A – saadakse ruutu mastist kaart
B – saadakse piltkaart (soldat, emand, kuningas, äss)
C – saadakse risti mastist mittepilt (risti 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

Leida järgmised tõenäosused:

$p(A \cup B) =$

$p(A \cap B) =$

$p(\overline{C} \cap B) =$

2. Toote valmistusprotsessis võib tootel ilmneda kahte liiki pisivigu. Need esinevad üksteisest sõltumatult 5% ja 10% toodetest. Toode lastakse müüki, kui sellel pole üle ühe vea.
Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud toode on müügikõlblik?

3. Tõenäosus tabada kiviga 5 meetri kauguselt tikutopsi on 0,1. Kui tehakse viis katset, kui suur on siis tõenäosus, et vähemalt ühel korral tikutopsi ka tabatakse?

4. Loosimismasinas on kuulid, millel on numbrid 1, 2, 3, …, 48. Viking Lottos valitakse järjest kuus kuuli. Kui suur on tõenäosus, et mängijal õnnestub ära arvata vähemalt üks võidunumber?

5. Sündmuse A toimumise tõenäosus on 0,8. Sündmuse B toimumise tõenäosus on 0,3. Kui on teada, et sündmused A ja B on sõltumatud ning teineteist mittevälistavad, kui suur on siis tõenäosus, et
a) toimuvad mõlemad sündmused;
b) ei toimu kumbki sündmustest;
c) toimub vähemalt üks sündmustest;
d) toimub ainult üks sündmustest?

6. Sündmuste A, B, C, D kohta on teada, et
$p(A) = 0,3$ $p(B) = 0,6$ $p(C) = 0,1$
$p(D|A) = 0,8$ $p(D|B) = 0,5$ $p(D|C) = 0,9$

Leida $p\left[(A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)\right] =$

Lahendused

1. Leiame sündmuste tõenäosused:

$$p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$
$$p(B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$
$$p(C) = \frac{9}{52}$$

Sündmused A ja B on teineteist mittevälistavad sündmused, seetõttu
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{13} - \frac{1}{13} = \frac{25}{52}$$

Leiame sündmuste korrutise tõenäosuse

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{13}$$
Kuna $p(B \mid \overline{A}) = \frac{12}{39} = \frac{4}{13}$, siis A ja B on sõltumatud sündmused.

Leiame ka viimase tõenäosuse: $p(\overline{C} \cap A) = p\left(\overline{C}\right) \cdot p(A \mid \overline{C}) = \frac{43}{52} \cdot \frac{13}{43} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

Viimase tulemuseni oleksime jõudnud ka siis, kui oleksime tähele pannud, et $\overline{C} \cap A = A$

2. Tähistame sündmused järgmiselt:
A – tootel on esimest liiki viga; $p(A) = 0{,}05$
B – tootel on teist liiki viga; $p(B) = 0{,}1$

Tuleb leida tõenäosus järgmisele sündmusele: $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$
/tootel vigu pole või tal on esimest liigi viga või tal on teist liiki viga/

Kuna sündmused on sõltumatud ning sulgavaldised on üksteist välistavad, siis leiame, et
$$p\left[\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = 0{,}95 \cdot 0{,}9 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 + 0{,}95 \cdot 0{,}1 = 0{,}995$$

3. Tähistades A_i – tabatakse i-ndal katsel, tuleb leida tõenäosus
$$p\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5\right) = 1 - p(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}) =$$
$$= 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 1 - 0{,}9^5 = 1 - 0{,}59049 \approx 0{,}410$$

/arvestasime, et sündmused A_i on sõltumatud; läksime üle vastandsündmusele/

4. Leiame vastandsündmuse tõenäosuse ("ei õnnestu ära arvata ühtegi numbrit"), seejärel sündmuse tõenäosuse:

$$p(A) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47} \cdot \frac{40}{46} \cdot \frac{39}{45} \cdot \frac{38}{44} \cdot \frac{37}{43} \approx 1 - 0{,}427 = 0{,}573$$

5.

$$p(A \cap B) = 0,8 \cdot 0,3 = 0,24$$

$$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,2 \cdot 0,7 = 0,14$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,8 + 0,3 - 0,8 \cdot 0,3 = 0,86$$

või

$$p(A \cup B) = 1 - p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0,14 = 0,86$$

$$p\left[\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right] = 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,3 = 0,62$$

6. Andmetest lähtub, et sündmused *A, B, C* on üksteist välistavad sündmused, seetõttu on ka sulgavaldised üksteist välistavad sündmused.

Nn täistõenäosuse valemi järgi leiame, et

$$p\left[\left(A \cap D\right) \cup \left(B \cap D\right) \cup \left(C \cap D\right)\right] = p(A) \cdot p(D \mid A) + p(B) \cdot p(D \mid B) + p(C) \cdot p(D \mid C) =$$

$$= 0,3 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,63$$